محال بودن دانستن مجموعه تمام حقایق

گردآوری : شارمین مهرآذر
Sh.mehrazar@Gmail.com

ایده این برهان نخستین بار توسط پاتریک گریم در نوشتار زیر مطرح شده است.
.Patrick Grim, "There Is No Set of All Truths," Analysis,44,1984,pp.206-208

پیشگفتار

این استدلال یکی از استدلالهای منطقی علیه وجود خدا هست که توسط پاتریک گریم برای نخستین بار ارائه شده است و به استدلال گریم در کتب فلسفه دین شهرت یافته است، روش کار اینگونه برهان ها همانگونه که در برگ براهین منطقی اثبات عدم وجود خدا توضیح داده شده است نشان داده وجود تناقض میان دو ویژگی از ویژگی ها در تعریف فلسفی وجود خدا (خداوند چیست؟) و با استناد به اصل تناقض (تناقض چیست؟) نشان داده میشود که خداوند نمیتواند وجود داشته باشد. برخی از برهانهای منطقی اثبات عدم وجود خدا همچون همین برهان تناقض را میان دو ویژگی نشان نمیدهند بلکه نشان میدهند یکی از ویژگیهای خدا از لحاظ منطقی متناقض است و وجود داشتن موجودی با این ویژگیها محال است. این برهان نیز نشان میدهد به دلیل اینکه دانستن تمامی حقایق از لحاظ منطقی محال است، هیچکس نمیتواند این حقایق را بداند، در نتیجه موجود علیمی نمیتواند وجود داشته باشد، پس خدا وجود ندارد.

درک این برهان به دانشی ابتدائی از تئوری مجموعه ها دارد که خواننده میتواند از اینجا آنرا کسب کند، باقی مطالب در ارتباط با مجموعه ها که در این برهان از آنها استفاده میشود در هنگام بحث برهان بطور مختصر توضیح داده خواهند شد.

فرمولاسیون

1- خداوند یک موجود علیم است. بنابر تعریف خدا.

2- یک موجود علیم باید تمامی اجزاء مجموعه تمام حقایق هستی را بداند. بنابر تعریف خدا و تعریف مجموعه حقایق هستی.

3- دانستن تمامی اجزاء مجموعه تمام حقایق هستی محال است. بنابر قضیه کانتور.

4- یک وجود علیم نمیتواند وجود داشته باشد. نتیجه از 3.

5- خدا نمیتواند وجود داشته باشد. نتیجه از 4 و 1.

6- خدا وجود ندارد. نتیجه از 5.

تعاریف

تعریف تناقض

تعریف تناقض را در نوشتاری با فرنام "تناقض چیست؟" بیابید.

تعریف مجموعه

یک مجموعه از اجتماع نهاد های قابل تمایز از یکدیگر پدید می آید. مثلاً **A** را در نظر بگیرید که اجزاء آن نام چهار گلها میباشد.

A = { "نیلوفر", "مریم", رز"", یاسمن"}

مجموعه بینهایت

یک مجموعه میتواند دارای نهایت یا بی نهایت باشد. بعنوان مثال مجموعه اعداد فرد یک مجموعه بی نهایت است.

O = {...,-3,-1,1,3,...}

بنابر تعریف جورج کانتور (1)، مجموعه ای مجموعه بی نهایت است که

الف - مجموعه ای تهی نباشد.

ب - رابطه ای یک به یک میان آن مجموعه و زیر مجموعه های مناسب آن وجود داشته باشد.

مجموعه مناسب

تعریف مجموعه مناسب (**Proper Subset**) - یک مجموعه مانند **S2** تنها درصورتی زیر مجموعه مناسب مجموعه دیگری مانند **S1** است. که هر عضو **S2** در **S1** باشد و **S1** حداقل یک عضو داشته باشد که در **S2** نباشد.

قضیه مجموعه توانی کانتور (2)

برای هر مجموعه **X**، قوت مجموعه توانی **X** بزرگتر از قوت مجموعه **X** است.

قضیه کانتور به ما می گوید هر قدر هم که مجموعه ای بزرگ باشد، باز هم می توانیم مجموعه ای بزرگتر از آن را در نظر بگیریم. این در مورد مجموعه های متناهی بدیهی است، اما اگر مجموعه تحت بررسی نامتناهی باشد، چندان بدیهی نیست.

دو مجموعه (و بویژه، دو مجموعه نامتناهی) را هم اندازه یعنی دارای کاردینالیته یکسان گوییم هرگاه بتوانیم تناظر یک به یکی میان اعضای دو مجموعه برقرار سازیم و در هیچ طرف هیچ عضوی باقی نماند. اگر بتوانیم نشان دهیم که میان دو مجموعه نامتناهی، هرگز نمی توان چنین "تناظر یک به یکی" برقرار ساخت، آن گاه می دانیم یکی از مجموعه ها باید به طور کاردینالی بزرگتر از مجموعه دیگر باشد. کانتور برای اثبات این قضیه از "برهان قطری سازی" خود که اکنون مشهور است، استفاده کرد که اثبات از طریق برهان خلف است. یعنی فرض می کنیم بزرگترین مجموعه نامتناهی وجود دارد و سپس نشان می دهیم که باید یک مجموعه بازهم بزرگتر باشد. بنابراین، فرض کنید X مجموعه ای نامتناهی است و آن را چنین نمایش می دهیم:

$$X = \{a, b, c, d, e, \ldots\}$$

برای نشان دادن اعضای مجموعه ها از حروف استفاده می کنیم و فرض می کنیم که تعدادی نامتناهی از این اعضا وجود دارد. به ویژه فرض می کنیم که X بزرگترین اندازه مجموعه ای است که وجود دارد- یعنی هیچ مجموعه دیگری نمی تواند "نامتناهی بزرگتری" باشد. اکنون یادآوری می کنیم که همیشه می توانیم مجموعه توانی X را که با $P(X)$ مایش داده می شود با تشکیل مجموعه تمام زیرمجموعه های X تشکیل دهیم.

$$P(X) = \{ \{a\}, \{a,b\}, \{b,c,e,\}, \{a,c\}, \{e\}, \ldots\}$$

مشاهده می کنیم که $P(X)$ خود یک مجموعه است. و در خاطر نگه می داریم که براساس فرض نمی تواند بزرگتر از X باشد، زیرا ما فرض کردیم که X به بزرگترین اندازه ای است که یک مجموعه می تواند باشد. اما بدیهی است که نمی تواند کوچکتر از X باشد، زیرا حاوی تمام زیرمجموعه های تکتایی X است، یعنی به ازای هر عضو $a, b, c, \ldots$ در X، دارای عضوی به شکل $\{a\}$، $\{b\}$، $\{c\}$ و مانند آن است. در نتیجه اندازه این دو مجموعه باید مساوی باشد. یعنی، باید بتوانیم تناظر یک به یکی میان اعضای X و اعضای $P(X)$ برقرار کنیم به نحوی که در هیچ طرف عضوی باقی نماند. چنین تناظری چیزی شبیه شکل زیر است.

$$
\begin{array}{ccc}
 & a \longleftrightarrow \{c,d\} & \\
 & b \longleftrightarrow \{a\} & \\
X & c \longleftrightarrow \{a,b,c,d\} & P(X) \\
 & d \longleftrightarrow \{b,e\} & \\
 & e \longleftrightarrow \{a,c,e\} & \\
 & \ldots\ldots &
\end{array}
$$

توجه کنید که برخی اعضای X با زیرمجموعه هایی متناظر شده اند که حاوی خود آن ها هستند. مثلاً در این جا، عضو e با زیرمجموعه $\{a,c,e\}$ متناظر شده است. دیگر اعضا با زیرمجموعه هایی متناظر شده اند که حاوی آن ها نیستند. مثلاً در این جا عضو a با زیرمجموعه $\{c,d\}$ متناظر شده است. مجموعه تمام اعضای X را که با زیرمجموعه های حاوی خود متناظر نشده اند در نظر بگیرید. این مجموعه که آن را مثلاً F می نامیم، خود زیرمجموعه ای از X است، بنابراین باید جایی در تناظر فوق پدیدار شود.

اما آن عضو X که با F متناظر است چه می تواند باشد؟ نمی تواند عضوی از F باشد، زیـرا F بـویژه بـه نحوی ساخته شده است که فقط حاوی آن اعضای X باشد که با مجموعه هایی که حاوی آن ها هـستند متناظر نباشند. از سوی دیگر، اگر عضو X که متناظر با F است در F قرار نداشته باشد ... آن گاه خوب باید در F قرار داشته باشد، بازهم بنابر تعریف F!

این یک تناقض است و وجود این تناقض نشان می دهد که هیچ عضو X را نمی توان با این زیرمجموعـه متناظر کرد. تناظر ما نمی تواند کامل باشد. و چون نمی توانیم میان X و P(X) تناظر یک به یک برقـرار سازیم و چون همان طور که دیدیم، P(X) نمی تواند کوچکتر از X باشد، تنها نتیجه ممکن این است که P(X) بزرگتر از X است. این قضیه کانتور را کامل می کند. لحظه ای تأمل می کنـیم تـا معنـای قـضیه کانتور را دریابیم. این قضیه نشان می دهد که برای هر مجموعه ای، مجموعه دیگری وجود دارد کـه بـه معنای خاص نوع بزرگتری از نامتناهی بودن، بزرگتر است. بنابراین، "بزرگترین نامتناهی" هم نمی توانـد وجود داشته باشد! بنابراین، انواع نامتناهی، "نامتناهی" هستند!

بحث

بعد از این تعاریف ابتدائی به شرح برهان خواهیم پرداخت.

یک دسته از حقایق حقایق گزاره ای یا قضیه ای هستند، که میتوان آنها را بر اسـاس اصـل دوالانـسی منطق صحیح یا غلط دانست. بعنوان مثال هرکدام از روابط ریاضی موجود بین اعداد حقیقتـی هـستند. یعنی 4=2+2 یک حقیقت است و همچنین 0=2-2 یک حقیقت دیگر. حال از آنجا که این حقـایق قابـل تمیز داده شدن از یکدیگر هستند میتوان اجتماع آنها را بصورت یک مجموعه تصور کرد.

بعنوان مثال مجموعه A را در نظر بگیرید که اعضای آن دو حقیقت یاد شده هستند.

$$A = \{ "2+2=4", "2-2=0" \}$$

پرواضح است که به دلیل بی نهایت بودن مجموعه اعداد، بی نهایت نیز رابطه حقیقی از نوع یاد شـده در میان آنها وجود دارد، یعنی میتوان مجموعه ای از حقایق ریاضی را تصور کرد که تمامی این حقایق را در خود گنجانیده است، نام این مجموعه را T بگذاریم.

$$T = \{ T1, T2, T3, \ldots \}$$

هرکدام از Ti های موجود در این مجموعه خود یک حقیقت هستند. از آنجـا کـه بـی نهایـت عـدد در مجموعه اعداد وجود دارد مجموعه T نیز بنابر تعریف داده شده از یک مجموعه بینهایـت، مجموعـه ای بینهایت است. حال یکی از ویژگیهای خدا در تعریف آن (خداوند چیست؟) علیم بودن خدا است، به این معنی که خدا بر تمامی حقایق آگاه است.

به دلیل اینکه حقایق از یکدیگر قابل تمایز هستند، اجتماع آنها را میتوان بصورت مجموعه ای از حقایق نشان داد. آشکار است که تمامی حقایق موجود در هستی باید مجموعه حقایق ریاضـی را نیـز در خـود بگنجاند و از آنجا که آن مجموعه بینهایت است، مجموعه تمامی حقایق موجود در هستی نیـز مجموعـه ای بینهایت است. نتیجه منطقی آنکه خداوند به دلیل علیم بودن خود باید لزوماً مجموعه تمامی حقـایق هستی را که آنرا نیز T فرض میکنیم بداند و در صورتی که حتی یکی از اعضای این مجموعه را نیز نداند علیم نیست.

مرحله بعدی در این استدلال این است که نشان دهیم دانستن مجموعه T محال است. زیرا مجموعــه T بنا بر قضیه کانتور قابل تصور نیست. به یاد داشته باشید که فرض کــردیم مجموعــه T تمــامی حقــایق هستی را در بر دارد و مجموعه ای بینهایت است. آشکار است که دانستن اعضای ایــن مجموعــه بــرای انسان میسر نیست زیرا شما هرچقدر هم که از اجزاء این مجموعه را بدانیــد بــاز هــم اعــضای دیگــری خواهند بود که شما آنها را هنوز نمیدانید. اما ممکن است گفته شود که دانستن اعــضای ایــن مجموعــه برای خدا محال نیست زیرا خدا خود نیز بینهایت است و میتواند این مجموعه را درک کنــد. البتــه ایــن پاسخ، قانع کننده نیست زیرا بی نهایت بودن خدا به خودی خود به معنی این نیست که او بتواند اعضای این مجموعه را بداند.

اما استدلال ما این نیست، همانطور که گفته شد مسئله اینجا است که بنابر قضیه کانتور که از راه برهان خلف اثبات میشود که چنین مجموعه نمیتواند وجود داشته باشد. برای هر مجموعه میتوان مجموعــه ای توانی را نیز تصور کرد، نام مجموعه توانی که برای T در نظر خواهیم گرفت را PT بگذاریم. حــال اجــزاء PT بصورت زیر خواهند بود.

PT = {

{ Ø }

{ T1 }

{ T2 }

{ T3 }

.

.

.

{ T1, T2 }

{ T1, T2, T3 }

.

.

.

آشکار است که متناظر با هر عضو مجموعه PT حداقل یک حقیقت وجود دارد. بعنوان مثال T1 یا عضوی از هریک از سایر اعضای PT خواهد بود یا نخواهد بود. بنابر این تنها در مورد عضو دوم حقایق زیر وجود دارد.

T1 یک عضو از مجموعه { Ø } نیست.

T1 یک عضو از مجموعه { T1 } هست.

T1 یک عضو از مجموعه { T2 } نیست.

T1 یک عضو از مجموعه { T1, T2 } هست.

بنابر این وقتی مجموعه PT را در نظر میگیریم، حداقل یک حقیقت در تناظر با هریک از اعضای این مجموعه وجود خواهد داشت. بنابر این همانگونه که قضیه کانتور نشان میدهد، مجموعه توانی "تمامی مجموعه ها" از مجموعه "تمامی مجموعه ها" بزرگ تر است. بنابر این حقایقی بیش از آنچه در T وجود داشته است وجود دارند، و این یک تناقض است چون T را مجموعه تمام حقایق هستی که هیچ حقیقتی خارج از آن وجود ندارد فرض کرده ایم، لذا با استفاده از برهان خلف نشان داده ایم که چنین مجموعه ای اساسا نمیتواند وجود داشته باشد. نتیجه آنکه مجموعه ای با فرنام "مجموعه تمام حقایق هستی" وجود ندارد و چون این مجموعه وجود ندارد دانستن آن از دیدگاه معرفت شناسی (Epistemologically) محال است، و چون یک موجود علیم باید قطعاً تمامی حقایق هستی را بداند که بتوان علیم اش نامید، هیچ موجود علیمی نمیتواند وجود داشته باشد و چون هیچ موجود علیمی نمیتواند وجود داشته باشد خدا نیز نمیتواند وجود داشته باشد.

نتیجه

اگر خداوند در تعریف خود علیم است، وجود او نمیتواند جزوی از حقایق تشکیل دهنده جهان باشد و خدا نمیتواند وجود داشته باشد.

شبهات

شبهه نخست

ممکن است خداباور این نتیجه را انکار کند و بگوید از آنجا که خدا خود تنها خالق تمامی واقعیت ها و حقایق (البته به غیر از واقعیت خودش) است، میتواند T را بداند. اما ایراد این شبهه سفسطه مصادره به مطلوب است که در آن بکار برده شده است. مسئله اینجا است که چیزی که بنا بر تعریفش متناقض است بنا بر اصل تناقض قابل دانستن نیست و خالقی ندارد.

شبهه دوم

ممکن است خداباور بگوید عدم امکانپذیری قرار دادن مفهوم "تمام حقایق" در تعریف مجموعه به این معنی نیست که تمام حقایق وجود ندارد. در پاسخ میتوان گفت با فرض وجود تمام حقایق هیچ دلیلی وجود ندارد که نتوان آنرا بصورت مجموعه ای بینهایت تعریف کرد، برای اینکه جقایق مجموعه ای شوند تنها کافی است که از یکدیگر قابل تمیز دادن باشند، و اگر اجماع تمام حقایق ممکن بود، مجموعه تمام حقایق نیز ممکن میبود، اما از آنجا که وجود مجموعه تمام حقایق غیر ممکن است (بنابر اثباتی که صورت گرفت)، میتوان نتیجه گرفت که "تمام حقایق" نیز غیر قابل تصور است، لذا نمیتوان تصور کرد

که علیمی وجود داشته باشد، یا بعبارت دیگر وجود علیم به دلیل عدم امکان اتحاد تمامی حقایق محـال است. شبهات خود را پیرامون این برهان میتوانید با کلیک کردن روی دکمه "بحث و گفتمان" در پایین این صفحه مطرح کنید و شبهات خوب در همین برگ پاسخ داده خواهند شد.

توضیحات و منابع:

1- **جورج کانتور یک ریاضی دان آلمانی با اصلیت روسی است که مبتکر نظریه مجموعه (Set Theory) به شمار میرود.**

2- **قضیه مجموعه توانی کانتور.**

توسط: آرش بیخدا